

Písemka z Teorie čísel a RSA, 29. března 2007

1. příklad (5 bodů)

Najdi celá čísla a, b taková, že $(93, 255) = 93a + 255b$.

2. příklad (5 bodů)

Najdi celé číslo $a \in \{0, 1, 2, \dots, 41\}$ takové, že $5^{63} \equiv a \pmod{42}$.

3. příklad (5 bodů)

Definuj Eulerovu funkci $\varphi(n)$. Pomocí definice urči, kolik je $\varphi(p^a)$, kde p je prvočíslo a a přirozené číslo.

4. příklad (5 bodů)

Vyřeš soustavu kongruencí $4x \equiv 3 \pmod{5}$, $3x \equiv 2 \pmod{7}$, kde $x \in \mathbb{Z}$.

5. příklad (5 bodů)

Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $12x + 14y + 21z = 2$.

6. příklad (5 bodů)

Najdi všechna $x, y, z \in \mathbb{Z}$ taková, že $x^3 + 3y^3 + 9z^3 = 9xyz$.

7. příklad (5 bodů)

Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $x^2 + 11 = 8y^3$.

8. příklad (5 bodů)

Najdi všechna $x, y \in \mathbb{Z}$ taková, že $xy = x + y$.

9. příklad (10 bodů)

Buď p prvočíslo. Spočti

$$\sum_I \prod_{i \in I} \frac{1}{i} \pmod{p},$$

kde sčítáme přes všechny k -prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \dots, p-1\}$.

K získání zápočtu je potřeba aspoň 30 bodů. Přeji hodně zábavy při řešení (: